Chapitre E

Opérateurs maximaux monotones

E.1. Définition et premières propriétés

Définition E.1.1 (Opérateur maximal monotone)**.** *Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$. On dit que A est monotone (ou accrétif) si*

$$\forall f \in D(A)\,, \quad (Af|f) \geq 0\,.$$

On dit que A est maximal monotone si de plus $Im(Id + A) = H$.

Proposition E.1.2. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

a) $D(A)$ est dense dans H ;

b) A est fermé ;

c) Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id+\lambda A$ est bijectif de $D(A)$ sur H et son inverse $(Id+\lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné avec $\|(Id+\lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Démonstration. Notons tout d'abord que pour tout $f \in H$ il existe un unique $g \in D(A)$ tel que $g + Ag = f$. En effet si g' est une autre solution alors

$$g - g' + A(g - g') = 0\,.$$

Il suffit alors de prendre le produit scalaire avec $g - g'$ et d'utiliser la monotonie de A pour trouver que $g = g'$. Par ailleurs on note que si $g + Ag = f$ alors

$$\|g\|_H^2 + (Ag|g) = (f|g) \leq \|f\|_H \|g\|_H$$

donc en particulier

$$\|g\|_H \leq \|f\|_H\,.$$

L'opérateur $\mathrm{Id}+A$ est donc bijectif de $D(A)$ sur H, et $R(1) := (\mathrm{Id}+A)^{-1}$ est borné de $D(A)$ dans H, de norme inférieure à 1.

a) Montrons que l'orthogonal de $D(A)$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc f dans H tel que

$$\forall g \in D(A)\,, \quad (f|g) = 0$$

et montrons que $f = 0$. On sait qu'il existe $g_0 \in D(A)$ tel que

$$g_0 + Ag_0 = f$$

donc en particulier

$$0 = (f|g_0) = \|g_0\|_H^2 + (Ag_0|g_0) \geq \|g_0\|_H^2\,.$$

On a alors $g_0 = 0$ et donc $f = 0$.

b) Montrons que A est fermé : soit (f_n, g_n) une suite du graphe $\mathrm{Gr}\,A$ de A (donc telle que $f_n \in D(A)$ et $g_n = Af_n$) vérifiant

$$(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g)\,,$$

et montrons que $f \in D(A)$ et $g = Af$. On a

$$f_n = (\mathrm{Id} + A)^{-1}(f_n + Af_n) \longrightarrow (\mathrm{Id} + A)^{-1}(f + g)$$

donc $f \in D(A)$ et $f + Af = f + g$, d'où le résultat.

c) On va procéder par récurrence en montrant que si $\mathrm{Id} + \lambda_0 T$ est surjectif pour un certain $\lambda_0 > 0$, avec $(\mathrm{Id} + \lambda_0 A)^{-1}$ de norme plus petite que 1, alors $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + \lambda A) = H$ pour tout $\lambda > \lambda_0/2$ et $(\mathrm{Id} + \lambda A)^{-1}$ est de norme plus petite que 1. Soit donc $f \in H$ et $\lambda_0/2 < \lambda$, on veut montrer qu'il existe un unique $g \in D(A)$ tel que

$$g + \lambda A g = f\,.$$

Cela revient à résoudre

$$g + \lambda_0 A g = \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) g + \frac{\lambda_0}{\lambda} f$$

ou encore

$$g = (\mathrm{Id} + \lambda_0 A)^{-1} \Big(\Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) g + \frac{\lambda_0}{\lambda} f \Big)\,.$$

Cette dernière équation se résout de manière unique grâce au théorème de point fixe de Banach dès que $|1 - \lambda_0/\lambda| < 1$ ou encore $\lambda > \lambda_0/2$. Le fait que la norme de $(\mathrm{Id} + \lambda A)^{-1}$ soit plus petite que 1 se démontre comme au-dessus.

La proposition est donc démontrée. □

Définition E.1.3. *Soit A un opérateur maximal monotone, et soit $\lambda > 0$, on rappelle que la résolvante de A est $R(\lambda) := (Id + \lambda A)^{-1}$, et on définit sa régularisée Yosida par l'opérateur de H dans H*

$$A(\lambda) := \frac{1}{\lambda}(Id - R(\lambda))\,.$$

Proposition E.1.4. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

a) Pour tout $\lambda > 0$, tout $f \in H$ et tout $g \in D(A)$,

$$A(\lambda) f = A(R(\lambda) f) \quad et \quad A(\lambda) g = R(\lambda)(Ag)\,.$$

b) Pour tout $f \in H$ et tout $g \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \to 0} R(\lambda) f = f \quad et \quad \lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) g = Ag\,.$$

c) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H$

$$(A(\lambda) f | f) \geq \lambda \|A(\lambda) f\|_H^2\,.$$

d) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H$

$$\|A(\lambda) f\|_H \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_H\,.$$

Démonstration. a) On sait que pour tout $f \in H$,

$$(\mathrm{Id} + \lambda A) R(\lambda) f = f$$

donc $AR(\lambda) f = A(\lambda) f$. Par ailleurs si $g \in D(A)$ alors

$$R(\lambda)(\mathrm{Id} + \lambda A) g = g$$

donc

$$R(\lambda) A g = \frac{1}{\lambda}(g - R(\lambda) g)\,.$$

b) Commençons par considérer $g \in D(A)$, alors (en rappelant que $R(\lambda)$ est de norme plus petite que 1)

$$\big\|g - R(\lambda) g\big\|_H = \lambda \big\|A(\lambda) g\big\|_H \leq \lambda \big\|Ag\big\|_H \longrightarrow 0\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

Par ailleurs comme $\overline{D(A)} = H$ puisque A est à domaine dense, alors pour tout $f \in H$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in D(A)$ tel que $\|f-g\|_H \leq \varepsilon$. Alors puisque $R(\lambda)$ est de norme plus petite que 1,

$$\|f - R(\lambda)f\|_H \leq \|g - R(\lambda)g\|_H + 2\|f-g\|_H$$

et donc

$$\|f - R(\lambda)f\|_H \longrightarrow 0\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

Comme $A(\lambda)g = R(\lambda)(Ag)$ on conclut que pour tout $g \in D(A)$, $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)g = Ag$.

c) On écrit

$$(A(\lambda)f|f) = (A(\lambda)f|f - R(\lambda)(f)) + (A(\lambda)f|R(\lambda)(f)) = \lambda\|A(\lambda)f\|_H^2 + (AR(\lambda)f|R(\lambda)f)$$

et le résultat suit de la monotonie de A.

d) résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de c). $\square$

Remarque. Cette proposition montre que l'on peut approcher A par une famille d'opérateurs bornés.

E.2. Théorème de Hille-Yosida

On rappelle la Définition D.5.1 des opérateurs symétriques et auto-adjoints. On a le résultat suivant.

Proposition E.2.1. *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur maximal monotone symétrique. Alors A est auto-adjoint, ainsi que sa résolvante.*

Démonstration. Rappelons que $R(1) := (\mathrm{Id} + A)^{-1}$ est borné sur H donc pour montrer qu'il est auto-adjoint il suffit de vérifier que $R(1)$ est symétrique, donc que

$$\forall f, g \in H\,, \quad (R(1)f|g)_H = (f|R(1)g)_H\,.$$

Par définition on a $R(1)f \in D(A)$ et $R(1)g \in D(A)$, et

$$R(1)f + AR(1)f = f\,, \quad R(1)g + AR(1)g = g\,.$$

Comme A est symétrique on a alors

$$(f|R(1)g)_H = (R(1)f + AR(1)f|R(1)g)_H = (R(1)f|R(1)g + AR(1)g)_H = (R(1)f|g)_H\,.$$

Montrons que $D(A^*) = D(A)$. Soit $f \in D(A^*)$ et soit $h := f + A^*f$. Alors

$$\forall g \in D(A)\,, \quad (h|g)_H = (f|g + Ag)_H\,.$$

Comme $R(1)$ est une bijection de H sur $D(A)$, cela équivaut à

$$\forall u \in H\,, \quad (h|R(1)u)_H = (f|u)_H\,.$$

On a donc $f = R(1)h \in D(A)$, et la proposition est démontrée. $\square$

Théorème E.2.2. *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur maximal monotone symétrique. Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; H) \cap C(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; D(A)) \cap C(\mathbb{R}^+; H)$ au problème d'évolution*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u + Au = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{R}^+ \setminus \{0\};\,, \\ &u_{|t=0} = u_0\,. \end{aligned} \tag{E.1}$$

On a de plus pour tout $t > 0$

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \textit{et} \quad \Big\|\frac{d}{dt}u(t)\Big\|_H \leq \frac{1}{t}\|u_0\|_H\,.$$

Démonstration. • Unicité. Celle-ci s'obtient très simplement grâce à la monotonie de A. Soient en effet u et v deux solutions associées à la même donnée initiale u_0, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|_H^2 = -\big(A(u-v)|u-v\big)_H \leq 0$$

et donc $u-v$ est identiquement nulle.

• Existence. Soit $A(\lambda)$ la régularisée Yosida de A. Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution u_λ dans H à

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u_\lambda + A(\lambda)u_\lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+\,,\\ &u_{\lambda|t=0} = u_0\,. \end{aligned} \tag{E.2}$$

Montrons que les fonctions $t \mapsto \|u_\lambda(t)\|_H$ et $t \mapsto \|A(\lambda)u_\lambda(t)\|_H$ sont décroissantes. On commence par remarquer que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|_H^2 = \Big(\frac{d}{dt}u_\lambda(t)|u_\lambda(t)\Big)_H = -\big(A(\lambda)u_\lambda(t)|u_\lambda(t)\big)_H \leq 0\,.$$

Par ailleurs on peut montrer par récurrence (comme $A(\lambda)$ est un opérateur borné) que u_λ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^+;H)$ et

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k u_\lambda(t) + A(\lambda)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k u_\lambda(t) = 0\,.$$

Par le même calcul que précédemment il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}\Big\|_H^2 \leq 0\,.$$

En particulier on a donc pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda\Big\|_H = \|A(\lambda)u_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H\,.$$

Montrons maintenant que pour tout $t \geq 0$, la suite $u_\lambda(t)$ converge vers une limite $u(t)$ quand λ tend vers 0, et que la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0,T]$. Soient μ et ν deux réels strictement positifs et soit $u_{\lambda\mu}(t) := u_\lambda(t) - u_\mu(t)$. On a

$$\frac{d}{dt}u_{\lambda\mu} + A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu = 0$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 + \Big(A(\lambda)u_\lambda(t) - A(\mu)u_\mu(t)|u_{\lambda\mu}(t)\Big)_H = 0\,.$$

Mais

$$\begin{aligned} &\Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|u_{\lambda\mu}\Big)_H\\ &\quad = \Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|u_\lambda - R(\lambda)u_\lambda + R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu + R(\mu)u_\mu - u_\mu\Big)_H\\ &\quad = \Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|\lambda A(\lambda)u_\lambda - \mu A(\mu)u_\mu\Big)_H\\ &\qquad + \Big(A(R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu)|R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu\Big)_H\\ &\quad \geq \Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|\lambda A(\lambda)u_\lambda - \mu A(\mu)u_\mu\Big)_H\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 \leq 2(\lambda+\mu)\|Au_0\|_H^2\,.$$

Par intégration on déduit

$$\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 \leq 4(\lambda+\mu)t\|Au_0\|_H^2$$

donc pour tout $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy quand λ tend vers zéro, et donc converge vers une limite notée $u(t)$. En prenant la limite $\mu \to 0$ il vient

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\|_H^2 \leq 4\lambda t \|Au_0\|_H^2$$

donc la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, T]$. On en déduit que u appartient à $C([0, T]; H)$.

Montrons que u est solution de (E.2). On commence par supposer que u_0 appartient à $D(A^2)$ (au sens où u_0 et Au_0 appartiennent à $D(A)$) et montrons que $v_\lambda(t) := \frac{d}{dt} u_\lambda(t)$ converge vers une limite et que la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, T]$. On a

$$\frac{d}{dt} v_\lambda + A(\lambda) v_\lambda = 0\,,$$

et donc les mêmes calculs que ci-dessus impliquent que la fonction $v_{\lambda\mu}(t) := v_\lambda(t) - v_\mu(t)$ vérifie

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{\lambda\mu}\|_H^2 \leq \big(\|A(\lambda)v_\lambda\|_H + \|A(\mu)v_\mu\|_H\big)\big(\lambda\|A(\lambda)v_\lambda\|_H + \mu\|A(\mu)v_\mu\|_H\big)\,.$$

Mais

$$\|A(\lambda)v_\lambda(t)\|_H \leq \|A(\lambda)v_\lambda(0)\|_H = \|A(\lambda)A(\lambda)u_0\|_H$$

et de même

$$\|A(\mu)v_\mu(t)\|_H \leq \|A(\mu)v_\mu(0)\|_H = \|A(\mu)A(\mu)u_0\|_H\,.$$

Puisque Au_0 appartient à $D(A)$ on a

$$A(\lambda)A(\lambda)u_0 = R(\lambda)AR(\lambda)Au_0 = R(\lambda)^2 A^2 u_0$$

et donc

$$\|A(\lambda)A(\lambda)u_0\|_H \leq \|A^2 u_0\|_H \quad \text{et} \quad \|A(\mu)A(\mu)u_0\|_H \leq \|A^2 u_0\|_H\,.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{\lambda\mu}\|_H^2 \leq 2(\lambda + \mu)\|A^2 u_0\|_H$$

et l'on conclut comme ci-dessus que $v_\lambda(t)$ converge vers une limite quand λ tend vers zéro et que cette convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, T]$. On a donc $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ et

$$\frac{d}{dt} u_\lambda(t) \longrightarrow \frac{d}{dt} u(t)\,, \quad \lambda \to 0\,, \quad \text{uniformément sur } [0, T]\,.$$

On peut alors passer à la limite dans l'équation (E.2). On a

$$\begin{aligned}\|R(\lambda)u_\lambda(t) - u(t)\|_H &\leq \|R(\lambda)u_\lambda(t) - R(\lambda)u(t)\|_H + \|R(\lambda)u(t) - u(t)\|_H \\ &\leq \|u_\lambda(t) - u(t)\|_H + \|R(\lambda)u(t) - u(t)\|_H \to 0\,, \quad \lambda \to 0\,,\end{aligned}$$

donc comme le graphe de A est fermé on obtient

$$u(t) \in D(A)\,, \quad A(\lambda)u_\lambda(t) = AR(\lambda)u_\lambda(t) \to Au(t)\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

On a alors

$$\frac{d}{dt} u(t) + Au(t) = 0\,,$$

u appartient à $C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C(\mathbb{R}^+; D(A))$ et on a de plus

$$\forall t \geq 0\,, \quad \|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \text{et} \quad \Big\|\frac{d}{dt} u(t)\Big\|_H \leq \|Au_0\|_H\,.$$

Plus généralement si u_0 appartient à $D(A^k)$ on montre que u appartient à $C^{k-j}(\mathbb{R}^+; D(A^j))$ pour tout $j \leq k$ avec

$$\forall t \geq 0\,, \quad \|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \text{et} \quad \Big\|\frac{d^j}{dt^j}u(t)\Big\|_H \leq \|A^j u_0\|_H\,.$$

Après intégration de (E.2) contre $t\dfrac{d}{dt}u_\lambda$ il vient de plus

$$\int_0^T \Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\Big\|_H^2\, t\,dt + \int_0^T (A(\lambda)u_\lambda|\frac{d}{dt}u_\lambda)_H(t)\, t\,dt = 0\,.$$

D'après la Proposition E.2.1 on sait que $R(\lambda)$ et $A(\lambda)$ sont autoadjoints, et on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^T (A(\lambda)u_\lambda|\frac{d}{dt}u_\lambda)_H(t)\, t\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T t\frac{d}{dt}(A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(t)\,dt\\ &= \frac{T}{2}(A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(T) - \frac{1}{2}\int_0^T (A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

D'autre part, comme la fonction $t \mapsto \|\dfrac{d}{dt}u_\lambda(t)\|_H$ est décroissante on a

$$\int_0^T \Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\Big\|_H^2\, t\,dt \geq \frac{T^2}{2}\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(T)\Big\|_H^2\,.$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|_H^2 + T(A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(T) + T^2\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(T)\Big\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2\,.$$

En particulier on a

$$T^2\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(T)\Big\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

et par passage à la limite $\lambda \to 0$ on obtient

$$\Big\|\frac{d}{dt}u(T)\Big\|_H \leq \frac{1}{T}\|u_0\|_H\,.$$

Supposons maintenant que $u_0 \in H$. On commence par montrer la densité de $D(A^2)$ dans $D(A)$ pour la norme du graphe donnée par $\|u\|_H + \|Au\|_H$. Soit donc $u_0 \in D(A)$ et soit la suite $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{0,n} := R(\frac{1}{n})u_0$$

de sorte que $u_{0,n}$ appartient à $D(A^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$Au_{0,n} = n(u_0 - u_{0,n}) \in D(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

On a

$$Au_{0,n} = A(\frac{1}{n})u_0 = R(\frac{1}{n})Au_0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} Au_{0,n} = Au_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} u_{0,n} = u_0\,.$$

Puisque $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ qui est lui-même dense dans H il existe une suite $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D(A^2)$ telle que $u_{0,n} \to u_0$ dans H. On note u_n la solution de

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u_n + Au_n = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\,,\\ &u_{n|t=0} = u_{0,n}\,.\end{aligned}$$

On sait que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

$$\forall t \geq 0\,, \quad \|u_n(t) - u_m(t)\|_H \leq \|u_{0,n} - u_{0,m}\|_H\,.$$

En outre

$$\forall t > 0\,, \quad \Big\| \frac{d}{dt} u_n(t) - \frac{d}{dt} u_m(t) \Big\|_H \leq \frac{1}{t} \| u_{0,n} - u_{0,m} \|_H\,.$$

On en déduit que (u_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ quand n tend vers l'infini et que $(\frac{d}{dt} u_n)$ converge uniformément sur $[\varepsilon, \infty[$ quand n tend vers l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$. On en conclut que $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; H) \cap C(\mathbb{R}^+; H)$. Comme A est fermé on a aussi $u \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et vérifie l'équation (E.1). $\square$